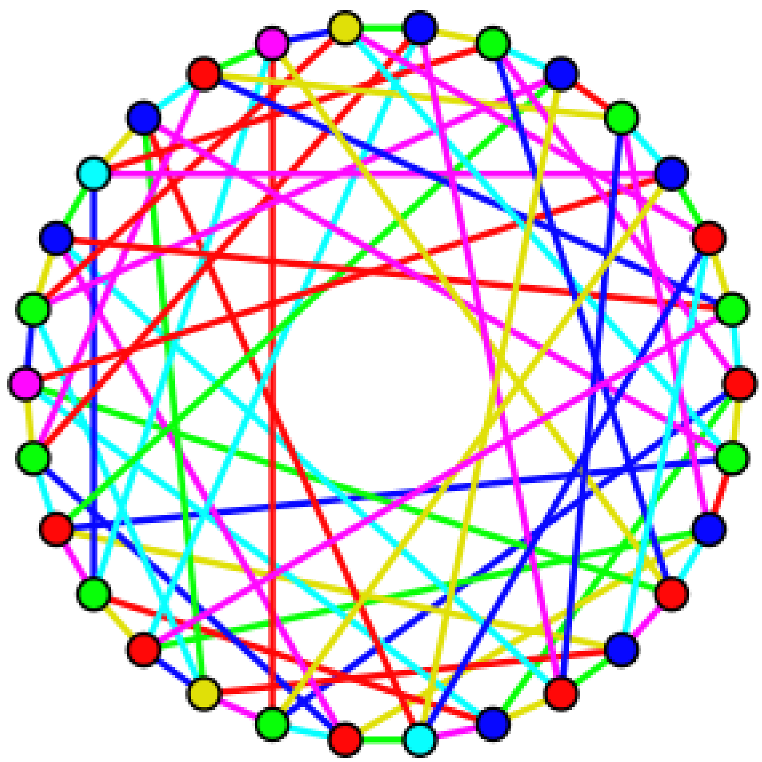
Proséminaire : Graphes expanseurs

1.5 Nombre d'indépendance et nombre chromatique
1.6 Grande maille et grand nombre chromatique

Davina Grand-Guillaume Perrenoud

25 octobre 2016



Université de Fribourg
Département de Mathématiques

Semestre d'automne 2016
Responsable : Dr. Corina Ciobotaru

Dans ces deux sections, les définitions de maille, nombre chromatique et nombre d'indépendance vont prendre une place centrale. Après une introduction à ces nouveaux termes par des exemples, les relations avec le nombre de sommets d'un graphe et aussi avec le spectre de sa matrice d'adjacence vont être présentées. Finalement, un théorème dont l'énoncé semble instinctivement contradictoire va être prouvé par la méthode probabiliste pour aboutir à l'existence de graphes avec une grande maille et un grand nombre d'indépendance.

1.5 Nombre d'indépendance et nombre chromatique

Pour tout ce chapitre, soit $X = (V, E)$ un graphe fini et sans boucles. Comme à l'accoutumée, on dénote par A la matrice d'adjacence de X.

Définition 1.5.1. *La maille (girth) d'un graphe X connexe, noté $g(X)$, est la longueur du plus petit cycle dans X. On dit que $g(X) = \infty$ si X est un arbre.*

Définition 1.5.2. *Le nombre chromatique (chromatic number) d'un graphe X, noté $\chi(X)$, est le nombre minimal de classes dans une partition*

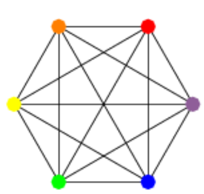
$$V = V_1 \cup V_2 \cup ... \cup V_\chi$$

tel que pour tout $i = 1, ..., \chi$ et pour tout $x, y \in V_i$ on ait $A_{xy} = 0$.
En d'autres mots : nombre de couleurs minimal nécessaire pour peindre les sommets d'un graphe tel que deux sommets adjacents aient une couleur différente.

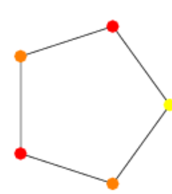
Définition 1.5.3. *Le nombre d'indépendance (independence number) d'un graphe X, noté $i(X)$, est la cardinalité maximale d'un sous-ensemble $F \subseteq V$ tel que $A_{xy} = 0$ pour chaque $x, y \in F$.*

$$i(X) = max\{|F| : F \subseteq V, F \text{ indépendant}\}$$

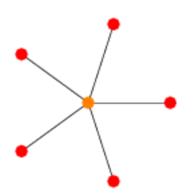
Exemples :



$\chi(K_6) = 6$
i(K_6)=1



$\chi(C_6) = 3$
i(C_6)=2



$\chi(S_6) = 2$
i(S_6)=5

Lemme 1.5.4. *Soit X un graphe fini, sans boucle avec $|V| = n$. Alors*

$$n \leq i(X) \cdot \chi(X).$$

Démonstration. Soit $\chi(X)$ le nombre chromatique de X. Il existe alors une partition $V = V_1 \cup V_2 \cup ... \cup V_\chi$. Comme $|V_i| \leq i(X) \forall\ i = 1, ..., \chi$, on a que

$$n = |V| = \sum_{j=1}^{\chi} |V_j| \leq \sum_{j=1}^{\chi} i(X) = \chi(X) \cdot i(X).$$

□

Pour un graphe fini, connexe, k-régulier avec spectre μ_0=k $> \mu_1 \geq ... \geq \mu_{n-1}$. On peut trouver une relation entre $i(X)$ et le spectre de X.

Proposition 1.5.5. *Soit X un graphe fini, connexe, k-régulier avec $|V| = n$. Alors*

$$i(X) \leq \frac{n}{k} \cdot max\{|\mu_1|, |\mu_{n-1}|\}.$$

Démonstration. Soit $F \subseteq V$ un sous-ensemble de V avec $|F| = i(X)$ et tel que $A_{xy} = 0$ pour chaque $x, y \in F$.
On considère la fonction $f \in \ell^2(V)$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} |V - F| & \text{si} \quad x \in F \\ -|F| & \text{si} \quad x \in V - F. \end{cases}$$

On a que

$$\sum_{x \in V} f(x) = |V - F||F| - |F||V - F| = 0.$$

En d'autres mots, f est orthogonale à la fonction constante dans ℓ^2(V). On peut représenter la matrice adjacente A de X sous forme diagonale dans une base de fonctions propres f$_0$,..., f$_{n-1}$ associées au valeurs propres de A :

$$A = \begin{pmatrix} k & & & \\ & \mu_1 & & \\ & & ... & \\ & & & \mu_{n-1} \end{pmatrix}.$$

On peut écrire $f = \sum_{i=0}^{n-1} m_i f_i$ comme combinaison linéaire des $f_0, ..., f_{n-1}$.
Par un calcul facile on a vu que $f_0 = \mathbb{1}$ (fonction propre associée à la valeur propre k).
Comme $< f, 1 >= 0$, on a que $m_0 = 0$. Alors :

$$||Af||_2 = ||A(\sum_{i=0}^{n-1} m_i f_i)|| = ||\sum_{i=0}^{n-1} m_i \mu_i f_i|| \leq ||max\{\mu_i\} \sum_{i=0}^{n-1} m_i f_i||$$
$$= |max\{\mu_i\}| \cdot ||\sum_{i=0}^{n-1} m_i f_i|| = max\{|\mu_i|\} \cdot ||f||_2 \ (1)$$

On va maintenant trouver une borne supérieure pour $||f||_2$ et une borne inférieure pour $||Af||_2$.

On a tout d'abord que :

$$\begin{aligned}||f||_2^2 =< f, f >= \sum_{x\in V} f(x)^2 &= |V-F|^2|F| - |F|^2|V-F| = |V-F||F|(|V-F|+|F|)\\ &= |V-F||F||V|\\ &\leq i(X)\cdot n^2 \Rightarrow \boxed{||f||_2 \leq \sqrt{i(X)}\cdot\text{n}}\ (2).\end{aligned}$$

Et également que pour $x \in F$:

$$(Af)(x) = \sum_{y\in V} A_{xy}f(y) = \sum_{y\in F} A_{xy}f(y) + \sum_{y\in V-F} A_{xy}f(y) = -|F|\cdot \sum_{y\in V-F} A_{xy} = -i(X)\cdot k$$

car $A_{xy}= 0$ pour chaque $x, y \in F$ et X est k-régulier. Et donc :

$$||Af||_2^2 = \sum_{x\in V}(\sum_{y\in V} A_{xy}f(y))^2 = \sum_{x\in V}(Af)(x)^2 \geq \sum_{x\in F}(Af)(x)^2 = i(X)\cdot(-i(X)\cdot k)^2 = i(X)^3\cdot k^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{||Af||_2 \geq \sqrt{i(X)^3}\cdot\text{k}}\ (3).$$

Si on met (2) et (3) dans (1) :

$$\sqrt{i(X)^3}\cdot k \leq max\{|\mu_1|, |\mu_{n-1}|\}\cdot\sqrt{i(X)}\cdot n.$$

En divisant par k$\cdot\sqrt{i(X)}$, on obtient le résultat. □

Corollaire 1.5.6. *Soit X connexe, fini k-régulier et t.q. $|V| = n$ Alors :*

$$\chi(X) \geq \frac{k}{max\{|\mu_1|, |\mu_{n-1}|\}}.$$

Si X est un graphe Ramanujan non bicoloré alors

$$\chi(X) \geq \frac{k}{2\sqrt{k-1}}.$$

Démonstration. La preuve est directe en utilisant la proposition précédente, $i(X)\leq \frac{n}{k}\cdot max\{|\mu_1|,|\mu_{n-1}|\}$, ainsi que le lemme que nous avons démontré plus haut, n $\leq$ i(X)χ(X) :

$$i(X) \leq \frac{n}{k}\cdot max\{|\mu_1|, |\mu_{n-1}|\} \Leftrightarrow \frac{k}{max\{|\mu_1|, |\mu_{n-1}|\}} \leq \frac{n}{i(X)} = \chi(X).$$

Par définition, un graphe Ramanujan est un graphe fini, connexe et k-régulier avec $|\mu_i|\leq 2\sqrt{k-1}$ pour toute valeur propre μ_i non triviale. Donc, en sachant que le graphe est non bicoloré (i.e. $\mu_{n-1} \neq -k$), on obtient $\chi(X) \geq \frac{k}{2\sqrt{k-1}}$. □

Exercices

1. Quels sont les résultats de cette section pour des graphes bipartites ?

   On a vu dans une proposition que pour les graphes bipartites on a $\mu_{n-1} = -k$ et en l'occurrence $|\mu_{n-1}| = k$ et évidement $\chi(X) = 2$. Donc pour ceux-ci :

$$Lemme \Rightarrow n \leq 2 \cdot i(X)$$

$$Proposition \Rightarrow i(X) \leq n$$

2. Calculer pour K_n et C_n le nombre chromatique et le nombre d'indépendance, puis vérifier le lemme et la proposition.

$$\begin{aligned} \chi(K_n) &= n \\ i(K_n) &= 1 \\ \text{Lemme : } n &\leq n \cdot 1 = n \\ \text{Proposition : } 1 &\leq \frac{n}{k} \cdot max\{|\mu_1|, |\mu_{n-1}|\} \leq n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi(C_n) &= \begin{cases} 3 & \text{si} \quad \text{n est impair} \\ 2 & \text{si} \quad \text{n est pair} \end{cases} \\ i(C_n) &= \begin{cases} \frac{n-1}{2} & \text{si} \quad \text{n}\geq 3 \text{ et impair} \\ \frac{n}{2} & \text{si} \quad \text{n} \geq 3 \text{ et pair} \end{cases} \\ \text{Lemme : n impaire : } n &\leq \frac{n-1}{2} \cdot 3 \Leftrightarrow 2n+3 \leq 3n \Leftrightarrow 3 \leq n \\ \text{n paire : } n &\leq \frac{n}{2} \cdot 2 = n \\ \text{Proposition : n impaire : } \frac{n-1}{2} &\leq \frac{n}{k} \cdot max\{|\mu_1|, |\mu_{n-1}|\} \leq n \Leftrightarrow n-1 \leq 2n \\ \text{n paire : } \frac{n}{2} &\leq \frac{n}{k} \cdot max\{|\mu_1|, |\mu_{n-1}|\} \leq n \Leftrightarrow n \leq 2n \end{aligned}$$

1.6 Grande maille et grand nombre chromatique

Théorème 1.6.1. *Soient k et c deux grands nombre. Alors il existe un graphe X tel que*

$$g(X) \geq k \text{ et } \chi(X) \geq c.$$

Le problème de l'existence de graphes finis avec une grande maille et un grand nombre chromatique a une longue histoire. En effet, intuitivement ces propriétés semblent contradictoires :

— Pour |V|=n, le graphe complet K_n a le nombre chromatique le plus élevé possible pour un graphe, soit n. Si l'on considère la maille d'un tel graphe, est de 3, donc minimale.

— Pour un graphe avec une grande maille, on peut remarquer qu'il est localement colorable en deux couleurs.

Cette divergence rend difficile une preuve par induction (constructive). La première preuve de ce théorème (Erdös, 1959) utilise une approche entièrement non-constructive : la méthode probabiliste.

Idée de la preuve

— Construire un espace de probabilité contenant tous les graphes de n sommets et m arêtes.

— Examiner les graphes qui n'ont pas les propriétés désirées et démontrer qu'en faisant "tendre n vers l'infini", la probabilité de trouver un tel graphe est nulle.

— En conclure qu'un "random graph" avec un nombre de sommets très élevé possède les propriétés recherchées avec "probabilité 1".

Démonstration (8 étapes). Soient k et c deux grands nombres. Soit n $\in \mathbb{N}$ un entier que l'on va faire tendre vers l'infini.
On fixe $0 < \epsilon < \frac{1}{k}$ et on pose $m =$[n$^{1+\epsilon}$] (avec [$\cdot$] partie entière).
Considérons l'ensemble de tous les graphes ayant n sommets et m arêtes, que l'on note $\chi_{n,m}$.

Etape 1
On compte le nombre d'éléments dans $\chi_{n,m}$:

$$|\chi_{n,m}| = \binom{\binom{n}{2}}{m}$$

Etape 2
Nous somme intéressés par les graphes $X\in$ $\chi_{n,m}$ qui ont un grand nombre chromatique. Par le lemme précédant, cela équivaut à chercher des graphes avec petit nombre d'indépendance i(X).
Rappel : Le graphe complet K_n a le plus petit nombre d'indépendance possible parmi les graphes.
Un "bon" graphe serait donc un graphe X tel que pour un p fixé et pour tout $P \subseteq V$ tel que $|P| = p$ on ait $|P \cap K_p| \geq$ n (i.e. le graphe a un grand nombre d'arêtes en commun avec un graphe complet K_p).
Soit $0 < \eta < \frac{\epsilon}{2}$ et posons p=[n$^{1+\eta}$].
On appelle "mauvais" les graphes X$\in$ $\chi_{n,m}$ qui a un peu d'arêtes en commun avec un graphe complet K_p donné.

Le nombre de graphes $X \in \chi_{n,m}$ qui a exactement $0 \leq$ l $\leq$ n arêtes en commun avec un graphe complet K_p donné est clairement :

$$\binom{\binom{2}{2}}{l}\binom{\binom{n}{2}-\binom{p}{2}}{m-l}$$

Donc le nombre de graphes X$\in$ $\chi_{n,m}$ qui ont au plus n arêtes en commun avec un K_p donné est :

$$\tilde{N}(K_p,n,m) = \sum_{l=0}^{n}\binom{\binom{p}{2}}{l}\binom{\binom{n}{2}-\binom{p}{2}}{m-l}$$

On va développer cette somme pour arriver à une borne pour $\tilde{N}(K_p,n,m)$.
Pour $0 \leq l \leq n \leq \frac{N}{2}$ on a que $\binom{N}{l} \leq \binom{N}{n}$ (voir exercices).
Donc pour n grand et $0 \leq$ l $\leq$ n on estime que

$$\binom{\binom{p}{2}}{l} \leq \binom{\binom{p}{2}}{n} \text{ et } \binom{\binom{n}{2}-\binom{p}{2}}{m-l} \leq \binom{\binom{n}{2}-\binom{p}{2}}{m}$$

en supposant que $n \leq \frac{1}{2}\binom{p}{2}$. On obtient donc :

$$\begin{aligned}
\tilde{N}(K_p,n,m) &\leq \sum_{l=0}^{n}\binom{\binom{p}{2}}{n}\binom{\binom{n}{2}-\binom{n}{2}}{m} \\
&= (n+1)\binom{\binom{p}{2}}{n}\binom{\binom{n}{2}-\binom{p}{2}}{m} \\
&= (n+1)\left(\frac{\binom{p}{2}(\binom{p}{2}-1)\cdot\ldots\cdot(\binom{p}{2}-n+1)}{n!}\right)\binom{\binom{n}{2}-\binom{p}{2}}{m} \\
{\scriptstyle car\ \binom{p}{2} < p^2\ et\ \frac{(n+1)}{n!} < 1} &= p^{2n}\binom{\binom{n}{2}-\binom{p}{2}}{m} \\
&= \frac{p^{2n}}{m!}(\binom{n}{2}-\binom{p}{2})(\binom{n}{2}-\binom{p}{2}-1)\cdot\ldots\cdot(\binom{n}{2}-\binom{p}{2}-m+1).
\end{aligned}$$

Pour $0 \leq l \leq m$ on a

$$\binom{n}{2}-\binom{p}{2}-l \leq \binom{n}{2}-\binom{p}{2}-l+l\frac{\binom{p}{2}}{\binom{n}{2}} = (\binom{n}{2}-l)(1-\frac{\binom{p}{2}}{\binom{n}{2}}).$$

et on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\tilde{N}(K_p,n,m) &\leq \frac{p^{2n}}{m!}[(\binom{n}{2}-0)(1-\frac{\binom{p}{2}}{\binom{n}{2}})]\cdot[(\binom{n}{2}-1)(1-\frac{\binom{p}{2}}{\binom{n}{2}})]\cdot\ldots\cdot[(\binom{n}{2}-m+1)(1-\frac{\binom{p}{2}}{\binom{n}{2}})] \\
&= \frac{p^{2n}}{m!}\binom{n}{2}(\binom{n}{2}-1)\cdot\ldots\cdot(\binom{n}{2}-m+1)\left(1-\frac{\binom{p}{2}}{\binom{n}{2}}\right)^m \\
&= p^{2n}\binom{\binom{n}{2}}{m}\left(1-\frac{\binom{p}{2}}{\binom{n}{2}}\right)^m.
\end{aligned}$$

Comme $p \leq n$ alors :

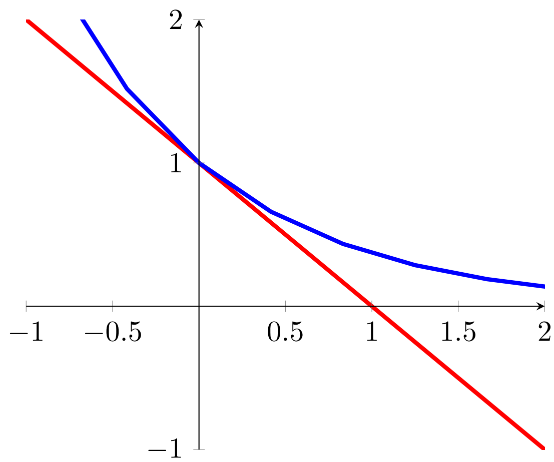
$$np-n \leq pn-p \Leftrightarrow n(p-1) \leq p(n-1) \Leftrightarrow \frac{p-1}{n-1} \leq \frac{p}{n} \Leftrightarrow \frac{(p-1)^2}{(n-1)^2} \leq \frac{p(p-1)}{n(n-1)} \Leftrightarrow 1-\frac{\binom{p}{2}}{\binom{n}{2}} \leq 1-\left(\frac{p-1}{n-1}\right)^2.$$

Donc

$$\tilde{N}(K_p, n, m) \leq p^{2n} \binom{\binom{n}{2}}{m} \left(1 - \left(\frac{p-1}{n-1}\right)^2\right)^m.$$

On peut voir sur le graphe suivant que pour $0 \leq x \leq 1$:

$$(1-x) \leq \exp(-x) \text{ et donc } (1-x)^m \leq \exp(-mx).$$



Comme $0 \leq \left(\frac{p-1}{n-1}\right)^2 \leq 1$ et en utilisant le premier pas, on obtient finalement :

$$\tilde{N}(K_p, n, m) \leq p^{2n} e^{-m\left(\frac{p-1}{n-1}\right)^2} \cdot |\chi_{n,m}|.$$

Etape 3

On généralise maintenant aux graphes $X \in \chi_{n,m}$ qui ont au plus n arêtes en commun avec plusieurs graphes complets K_p. Soit $N(n,m)$ le nombre de graphes $X \in \chi_{n,m}$ qui ont au moins n arêtes en commun avec K_p. Comme le nombre de possibilités d'avoir un graphe complet K_p sur n sommet est $\binom{n}{p}$ on a que

$$N(n,m) \leq \binom{n}{p} \tilde{N}(K_p, n, m).$$

Etape 4

On a pour un n grand que $\binom{n}{p} \leq n^p \leq p^n$ (car $p = [n^{1-\eta}]$). En utilisant les étapes 2 et 3, on trouve comme borne supérieure de $N(n,m)$:

$$\begin{aligned} N(n,m) &\leq p^n p^{2n} e^{-m\left(\frac{p-1}{n-1}\right)^2} \cdot |\chi_{n,m}| \\ &= p^{3n} e^{-m\left(\frac{p-1}{n-1}\right)^2} \cdot |\chi_{n,m}|. \end{aligned}$$

Etape 5

Comme $0 < \eta < \frac{\epsilon}{2}$, m=[$n^{1+\epsilon}$] et p=[$n^{1+\eta}$] on a que

$$\frac{N(n,m)}{|\chi_{n,m}|} = p^{3n}e^{-m\left(\frac{p-1}{n-1}\right)^2} \approx n^{(1-\eta)3n}e^{-n^{1+\epsilon-2\eta}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Cela nous garantit que la proportion de graphes $X \in \chi_{n,m}$ avec un grand nombre d'indépendance tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. On en conclut qu'il existe beaucoup de graphes $X \in \chi_{n,m}$ avec un petit nombre d'indépendance donc un grand nombre chromatique.

Etape 6

Nous nous occupons maintenant de la maille. Il n'est pas évident que ces graphes X avec un grand nombre chromatique, dont on a prouvé l'existence, aient une grande maille.

On définit $F_k : \chi_{n,m} \longrightarrow \mathbb{N}$ par $F_k(X)=$"nombre de circuits de longueur $l \leq k$ dans X"

On dénote par $M(n,k)$ la valeur moyenne de F_k :

$$M(n,k) = \frac{\sum_{X\in\chi_{n,m}} F(X)}{|\chi_{n,m}|}.$$

Etape 7

On peut calculer $M(n,k)$ d'une autre façon :

Soit c $= x_1x_2...x_lx_1$ un cycle de longueur $3 \leq l \leq k$. Un tel circuit apparaît dans $\binom{\binom{n}{2}-l}{m-l}$ graphes de $\chi_{n,m}$ (le circuit impose l arêtes, on choisit donc les $m-l$ arêtes restantes parmi les $\binom{n}{2}-l$ à disposition). De plus, il y a $n(n-1)\cdot...\cdot(n-l+1)$ cycles de longueur l possibles parmi n sommets. On a donc :

$$\begin{aligned}
M(n,k) &= \frac{1}{|\chi_{n,m}|}\cdot\sum_{l=3}^{k} n(n-1)\cdot...\cdot(n-l+1)\binom{\binom{n}{2}-l}{m-l} \\
&\leq \frac{1}{\binom{\binom{n}{2}}{m}}\sum_{l=3}^{k} n^l\binom{\binom{n}{2}-l}{m-l} = \sum_{l=3}^{k} n^l\frac{\binom{\binom{n}{2}-l}{m-l}}{\binom{\binom{n}{2}}{m}} \\
&= \sum_{l=3}^{k} n^l\frac{m(m-1)...(m-l+1)}{\binom{n}{2}[\binom{n}{2}-1]...[\binom{n}{2}-l+1]} \leq \sum_{l=3}^{k} n^l\frac{n^l m^l}{\binom{n}{2}[\binom{n}{2}-1]...[\binom{n}{2}-l+1]} \\
&= \sum_{l=3}^{k}\frac{n^l m^l}{\binom{n}{2}^l}\left[1+\left(\frac{\binom{n}{2}^l}{\binom{n}{2}[\binom{n}{2}-1]...[\binom{n}{2}-l+1]}-1\right)\right].
\end{aligned}$$

Comme $\frac{\binom{n}{2}^l}{\binom{n}{2}[\binom{n}{2}-1]...[\binom{n}{2}-l+1]} \longrightarrow \frac{n^2 l}{n^2 l}$ lorsque n$\to\infty$, alors $\left(\frac{\binom{n}{2}^l}{\binom{n}{2}[\binom{n}{2}-1]...[\binom{n}{2}-l+1]}-1\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$

Ce qui donne l'estimation :

$$\begin{aligned}
M(n,k) &\leq (1+o(1)) \cdot \sum_{l=3}^{k} \frac{n^l m^l}{\binom{n}{2}^l} = (1+o(1)) \sum_{l=3}^{k} \left(\frac{2m}{n-1}\right)^l \\
&\leq (1+o(1)) \cdot k \cdot \left(\frac{2m}{n-1}\right)^k \\
&\leq (1+o(1)) \cdot k \cdot \left(\frac{2^k (n^{1+\epsilon})^k}{n^k}\right) \\
&= o(n) \\
&\Rightarrow \frac{M(n,k)}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

<u>Etape 8</u>
Il en suit que lorsque n$\to \infty$,

$$\frac{1}{|\chi_{n,m}|} \sum_{X \in \chi_{n,m} : F(X) \geq \frac{n}{k}} \frac{n}{k} \leq \frac{1}{|\chi_{n,m}|} \sum_{X \in \chi_{n,m}} F(X) = M(n,k) = o(n).$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{\frac{n}{k} |X \in \chi_{n,m} : F(X) \geq \frac{n}{k}|}{|\chi_{n,m}|} = o(n) \\
&\Rightarrow \frac{|X \in \chi_{n,m} : F(X) \geq \frac{n}{k}|}{|\chi_{n,m}|} = o(1)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$La probabilité qu'un graphe ait un grand nombre de petits cycles tend vers 0 lorsque n$\to \infty$.

<u>Coda</u>
Pour $X \in \chi_{n,m}$ on considère les deux propriétés suivantes :

1. X a au moins n arêtes en commun avec chaque graphe complet K_p.
2. $F(X) \leq \frac{n}{k}$ ($\Leftrightarrow k{\cdot}F(X) < n$)

Par les 8 étapes étapes ont a vu que la proportion des $X \in \chi_{n,m}$ qui satisfont ces 2 propriétés est 1 lorsque n$\to \infty$.
On peut alors choisir un tel X.
Soit X' le graphe dont on a effacé toutes les arêtes qui forment des cycle fermés de longueur $\leq k$.
Clairement $g(X') > k$. Alors, selon la deuxième propriété on a effacé moins de n arêtes en passant de X à X' (maximum $n-1$ arêtes).
Donc, de la première propriété on déduit que le graphe X' a au moins une arête en commun avec chaque graphe complet K_p, ce qui nous donne $i(X') \leq p$.
Par le lemme on a $\chi(X') \geq \frac{n}{p} \geq \frac{n}{n^{1-\eta}} = n^\eta$. Le nombre chromatique du graphe X' est d'ordre n^η et peut donc être plus grand qu'une constance c si l'n choisit n assez grand.
X' répond à tous nos critères et donc au théorème. $\square$

Exercices

1. Prouver que pour $0 \leq l \leq n \leq \frac{N}{2}$ on a bien $\binom{N}{l} \leq \binom{N}{n}$.

PREUVE
On pose $k = n - l$.
Par définition on a :

$$\binom{N}{l} = \frac{N(N-1)\cdot ... \cdot (N-l+1)}{l!}$$
$$\binom{N}{n} = \frac{N(N-1)\cdot ... \cdot (N-n+1)}{n!}$$

On peut également écrire cette dernière égalité comme :

$$\binom{N}{n} = \frac{N(N-1)\cdot ... \cdot (N-l+1)(N-l)\cdot ... \cdot (N-n+1)}{(l+k)!}$$

Comme $(l+k)! = (l+k)(l+k-1)\cdot ... \cdot (l+k-k)! = (l+k)! = (l+k)(l+k-1)\cdot ... \cdot l! =$
$= n(n-1)...(n-k+1)l!$
On obtient :

$$\begin{aligned}\binom{N}{n} &= \frac{N!}{(N-l)!l!} \cdot \frac{(N-l)\cdot ... \cdot (N-n+1)}{n(n-1)...(n-k+1)} \\ &= \binom{N}{l} \cdot \frac{(N-l)\cdot ... \cdot (N-n+1)}{n(n-1)...(n-k+1)}\end{aligned}$$

On montre maintenant que le terme de droite est plus grand que 1 :

$$\begin{aligned}n \leq \frac{N}{2} \text{ et } l \leq \frac{N}{2} &\Leftrightarrow n + l \leq N \Leftrightarrow n \leq N - l \\ &\Leftrightarrow n(n-1)\cdot ... \cdot (n-k+1) \leq (N-l)(N-l-1)\cdot ... \cdot (N-l-k+1) \\ &= (N-l)(N-l-1)\cdot ... \cdot (N-n+1) \\ &\Leftrightarrow 1 \leq \frac{(N-l)(N-l-1)\cdot ... \cdot (N-n+1)}{n(n-1)\cdot ... \cdot (n-k+1)}\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\binom{N}{n} &= \binom{N}{l} \cdot \frac{(N-l)\cdot ... \cdot (N-n+1)}{n(n-1)...(n-k+1)} \\ &\geq \binom{N}{l}\end{aligned}$$

$\square$

2. Selon la construction du chapitre 1.6, quel doit être n pour avoir $g(X) \geq 10$ et $\chi(X) \geq 10$?

   On veut trouver la valeur de n pour qu'elle satifasse $n^\eta \geq 10$. Comme $\eta < \frac{\epsilon}{2} < \frac{1}{2g(X)}$ on a que $\eta < \frac{1}{20}$. Donc
$$n^\eta \geq 10 \Leftrightarrow n^{\frac{1}{20}} \geq 10 \Leftrightarrow n \geq 10^{20}$$

Référence

[1] Giuliana Davidoff, Peter Sarnak, and Alain Valette, *Elementary Number Theory, Group Theory and Ramanujan Graphs*, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.